Apéndice A

Pruebas de convergencia.

A.1. Contexto.

De acuerdo con el capítulo 6, podemos afirmar que la Memoria Asociativa Hopfield es autoasociativa, simétrica, con ceros en la diagonal principal.

En virtud de que la memoria es autoasociativa, el conjunto fundamental para la memoria Hopfield es $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \ldots, p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad A = \{1, -1\}$$

La *fase de aprendizaje* incluye la siguiente regla para obtener la ij-ésima componente de la memoria Hopfield $\mathbf{M}$:

$$m_{ij} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{p} x_i^\mu x_j^\mu \text{ si } x \neq j \\ \\ 0 \text{ si } x = j \end{cases} \tag{A.1}$$

Operativamente, el resultado de la expresión anterior se puede obtener en tres etapas:

1. Para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $n \times n$, la cual tiene unos en su diagonal principal:

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu, x_2^\mu, ..., x_n^\mu) = \begin{pmatrix} x_1^\mu x_1^\mu & \cdots & x_1^\mu x_i^\mu & \cdots & x_1^\mu x_n^\mu \\ x_2^\mu x_1^\mu & \cdots & x_2^\mu x_i^\mu & \cdots & x_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu x_1^\mu & \cdots & x_i^\mu x_i^\mu & \cdots & x_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu x_1^\mu & \cdots & x_n^\mu x_i^\mu & \cdots & x_n^\mu x_n^\mu \end{pmatrix}$$

2. A cada una de las p matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ se le resta la matriz identidad $\mathbf{I}$ de dimensiones $n \times n$, con el fin de lograr ceros en la diagonal principal:

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & x_1^\mu x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu x_i^\mu & \cdots & x_1^\mu x_n^\mu \\ x_2^\mu x_1^\mu & 0 & \cdots & x_2^\mu x_i^\mu & \cdots & x_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu x_1^\mu & x_i^\mu x_2^\mu & \cdots & 0 & \cdots & x_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu x_1^\mu & x_n^\mu x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu x_i^\mu & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. Se suman la p matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}$ para finalmente obtener la memoria $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{p} \left[\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I} \right] = [m_{ij}]_{n \times n}$$

En la *fase de recuperación* para la memoria Hopfield se le presenta un patrón de entrada $\widetilde{\mathbf{x}}$, y ésta cambiará su estado con el tiempo, de modo que cada neurona x_i ajuste su valor de acuerdo con el resultado que arroje la comparación de la cantidad

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$$

con un valor de umbral que es normalmente cero.

Representemos el estado de la memoria Hopfield en el tiempo t por $\mathbf{x}(t)$; entonces $x_i(t)$ representa el valor de la neurona x_i en el tiempo t y $x_i(t+1)$ el valor de x_i en el tiempo siguiente $(t+1)$.

Dado un vector columna de entrada $\tilde{\mathbf{x}}$, la fase de recuperación consta de tres pasos:

1. Para $t = 0$, se hace $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}$; es decir, $x_i(0) = \tilde{x}_i$, $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
2. $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ se calcula $x_i(t+1)$ de acuerdo con la condición siguiente:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(t) > 0 \\ x_i(t) \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(t) = 0 \\ -1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(t) < 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

3. Se compara $x_i(t+1)$ con $x_i(t)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Si $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ el proceso termina y el vector recuperado es $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$. De otro modo, el proceso continúa de la siguiente manera: los pasos 2 y 3 se iteran tantas veces como sea necesario hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $x_i(\tau + 1) = x_i(\tau)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$: el proceso termina y el patrón recuperado es $\mathbf{x}(\tau)$.

El proceso de convergencia descrito en el paso 3 de la fase de recuperación, indica que el sistema llega a un punto límite localmente estable en el tiempo τ.

La existencia de τ está garantizada a través de la demostración que hace Hopfield de que existen puntos límite localmente estables en su modelo de memoria asociativa; para ello, define la energía E del sistema de la siguiente manera, tomando en cuenta la condición de que $m_{ii} = 0, \forall i$:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_ix_j \tag{A.3}$$

y acto seguido demuestra que E es una función de x_i monótona decreciente.

Además de la demostración sugerida por Hopfield, los investigadores McEliece *et. al.* esbozan otro camino para demostrar la convergencia de la expresión A.3, en un importante trabajo donde analizan la capacidad de la memoria asociativa Hopfield (McEliece, Posner, Rodemich, & Venkatesh, 1987).

En este apéndice se desarrolla la sugerencia de Hopfield y también se desarrolla el esbozo de demostración de McEliece *et. al.*

A.2. Los desarrollos.

A.2.1. Hopfield

Si la memoria Hopfield M es simétrica, es decir $m_{ij} = m_{ji}, \forall i \forall j$, entonces E es monótona decreciente para el caso bipolar y monótona no creciente para el caso binario.

Consideremos la expresión A.3 para la energía:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}x_i x_j$$

Analicemos lo que sucede con E cuando la coordenada k-ésima se incrementa en Δx_k, de modo que $x_k \to x_k + \Delta x_k$, para algún $k \in \{1, 2, ..., n\}$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_ix_j\\ +m_{ik}x_i\left(x_k+\Delta x_k\right)\\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_ix_j\end{array}\right]+\\ \left[\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}\left(x_k+\Delta x_k\right)x_j\\ +m_{kk}\left(x_k+\Delta x_k\right)\left(x_k+\Delta x_k\right)\\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}\left(x_k+\Delta x_k\right)x_j\end{array}\right]+\\ \sum_{i=k+1}^{n}\left[\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_ix_j\\ +m_{ik}x_i\left(x_k+\Delta x_k\right)\\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_ix_j\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{k-1}\left[\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_ix_j+m_{ik}x_ix_k\\ +m_{ik}x_i\Delta x_k\\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_ix_j\end{array}\right]\\ +\sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}x_kx_j\\ +\sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}\Delta x_kx_j\\ +m_{kk}\left(x_k+\Delta x_k\right)\left(x_k+\Delta x_k\right)\\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}x_kx_j+\sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}\Delta x_kx_j\\ +\sum_{i=k+1}^{n}\left[\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_ix_j+m_{ik}x_ix_k\\ +m_{ik}x_i\Delta x_k+\sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_ix_j\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\left[\sum_{j=1}^{k-1}m_{ij}x_ix_j+m_{ik}x_ix_k+\sum_{j=k+1}^{n}m_{ij}x_ix_j\right]\\ \displaystyle+\Delta x_k\sum_{i=1}^{k-1}m_{ik}x_i\\ \displaystyle+\left[\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}x_kx_j+m_{kk}x_kx_k+\sum_{j=k+1}^{n}m_{kj}x_kx_j\right]\\ \displaystyle+\Delta x_k\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}x_j+\Delta x_k\sum_{j=k+1}^{n}m_{kj}x_j\\ +\Delta x_km_{kk}\left(2x_k+\Delta x_k\right)\\ \displaystyle+\sum_{i=k+1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k-1}m_{ij}x_ix_j+m_{ik}x_ix_k+\sum_{j=k+1}^{n}m_{ij}x_ix_j\right]\\ \displaystyle+\Delta x_k\sum_{i=k+1}^{n}m_{ik}x_i\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}x_ix_j+\Delta x_k\sum_{i=1}^{k-1}m_{ik}x_i\\ \displaystyle+\sum_{j=1}^{n}m_{kj}x_kx_j+\Delta x_k\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}x_j\\ \displaystyle+\Delta x_k\sum_{j=k+1}^{n}m_{kj}x_j+\Delta x_km_{kk}\left(2x_k+\Delta x_k\right)\\ \displaystyle+\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}x_ix_j+\Delta x_k\sum_{i=k+1}^{n}m_{ik}x_i\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}m_{ij}x_ix_j+\sum_{j=1}^{n}m_{kj}x_kx_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n}m_{ij}x_ix_j\\ \displaystyle+\Delta x_k\sum_{i=1}^{k-1}m_{ik}x_i+\Delta x_k\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}x_j+\Delta x_k\sum_{j=k+1}^{n}m_{kj}x_j\\ \displaystyle+\Delta x_km_{kk}\left(2x_k+\Delta x_k\right)+\Delta x_k\sum_{i=k+1}^{n}m_{ik}x_i\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}m_{ij}x_ix_j+m_{kj}x_kx_j+\sum_{i=k+1}^{n}m_{ij}x_ix_j\right)\\ +\Delta x_k\left[\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}m_{ik}x_i+\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}x_j\\ \displaystyle+\sum_{j=k+1}^{n}m_{kj}x_j+m_{kk}\left(2x_k+\Delta x_k\right)\\ \displaystyle+\sum_{i=k+1}^{n}m_{ik}x_i\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_{ij}x_ix_j\\ +\Delta x_k\left[\begin{array}{c}\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{k-1}m_{ik}x_i+m_{kk}x_k+\sum_{i=k+1}^{n}m_{ik}x_i\right)\\ \displaystyle+\left(\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}x_j+m_{kk}x_k+\sum_{j=k+1}^{n}m_{kj}x_j\right)\\ +m_{kk}\Delta x_k\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

$$E+\Delta E=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_{ij}x_ix_j-\frac{1}{2}\Delta x_k\left[\sum_{i=1}^{n}m_{ik}x_i+\sum_{j=1}^{n}m_{kj}x_j+m_{kk}\Delta x_k\right]$$

Por la expresión A.1 se tiene que $m_{kk}=0$, y por ello $m_{kk}\Delta x_k=0$; además, de acuerdo con la expresión A.3: $-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_{ij}x_ix_j=E$

$$E+\Delta E=E-\frac{1}{2}\Delta x_k\left[\sum_{i=1}^{n}m_{ik}x_i+\sum_{j=1}^{n}m_{kj}x_j\right]$$

Es decir:

$$\Delta E=-\frac{1}{2}\Delta x_k\left[\sum_{j=1}^{n}m_{jk}x_j+\sum_{j=1}^{n}m_{kj}x_j\right]$$

Por hipótesis la memoria es simétrica: $m_{jk} = m_{kj}$

$$\Delta E = -\tfrac{1}{2}\Delta x_k \left[\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j + \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j\right]$$

$$\Delta E = -\tfrac{1}{2}\Delta x_k \left(2\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j\right)$$

$$\Delta E = -\Delta x_k \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j$$

Para el caso bipolar, por la expresión A.2 se puede afirmar que Δx_k y $\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j$ tienen signos iguales, por lo que ΔE es negativa.

Para el caso binario, Δx_k y $\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j$ no pueden tener signos contrarios.

■

A.2.2. McEliece et. al.

Se mostrará que el producto interno o correlación

$$C = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}x_ix_j \tag{A.4}$$

es no decreciente cuando el estado $\mathbf{x}$ se mueve a través de una trayectoria del modelo.

La coordenada k-ésima del vector de prueba $\mathbf{x}$ cambiará y todas las demás permanecerán sin cambio alguno; es decir, $x_i(t+1) = x_i(t)$, $\forall i \neq k$. Entonces, de acuerdo con el algoritmo Hopfield:

$$x_k(t+1) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) > 0 \\ x_i(t) \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) = 0 \\ -1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) < 0 \end{cases} \tag{A.5}$$

Sea $\Delta x_k = x_k(t+1) - x_k(t)$, esto significa que $x_k(t+1) = x_k(t) + \Delta x_k$. Hallemos una expresión para el cambio $\Delta C = C(t+1) - C(t)$.

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)$$

$$\begin{aligned}
C(t+1) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{k-1}\left[\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_i(t)x_j(t) + m_{ik}x_i(t)x_k(t+1) \\ + \sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)\end{array}\right] \\
& + \left[\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}x_k(t+1)x_j + m_{kk}x_k(t+1)x_k(t+1) \\ + \sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}x_k(t+1)x_j(t)\end{array}\right] \\
& + \sum_{i=k+1}^{n}\left[\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_i(t)x_j(t) + m_{ik}x_i(t)x_k(t+1) \\ + \sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(t+1) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{k-1}\left[\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_i(t)x_j(t) + m_{ik}x_i(t)\left[x_k(t) + \Delta x_k\right] \\ + \sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)\end{array}\right] \\
& + \left[\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}\left[x_k(t) + \Delta x_k\right]x_j(t) \\ +m_{kk}\left[x_k(t) + \Delta x_k\right]\left[x_k(t) + \Delta x_k\right] \\ + \sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}\left[x_k(t) + \Delta x_k\right]x_j(t)\end{array}\right] \\
& + \sum_{i=k+1}^{n}\left[\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_i(t)x_j(t) + m_{ik}x_i(t)\left[x_k(t) + \Delta x_k\right] \\ + \sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C(t+1) = & \sum_{i=1}^{k-1}\left[\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_i(t)x_j(t) \\ +m_{ik}x_i(t)x_k(t) \\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t) \end{array}\right] + \sum_{i=1}^{k-1} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right) \\
& + \left[\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}x_k(t)x_j(t) \\ +m_{kk}x_k(t)x_k(t) \\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}x_k(t)x_j(t) \end{array}\right] + \sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) \\
& +2m_{kk}x_k(t)\Delta x_k + m_{kk}\left(\Delta x_k\right)^2 + \sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) \\
& + \sum_{i=k+1}^{n}\left[\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{k-1} m_{ij}x_i(t)x_j(t) \\ +m_{ik}x_i(t)x_k(t) \\ +\sum_{j=k+1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t) \end{array}\right] + \sum_{i=k+1}^{n} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(t+1) = & \sum_{i=1}^{k-1}\left[\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)\right] + \left[\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_k(t)x_j(t)\right] \\
& + \sum_{i=k+1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)\right] \\
& + \sum_{j=1}^{k-1} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) + m_{kk}\left(\Delta x_k\right)x_k(t) \\
& + \sum_{j=k+1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) \\
& + \sum_{i=1}^{k-1} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right) + m_{kk}x_k(t)\left(\Delta x_k\right) \\
& + \sum_{i=k+1}^{n} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right) + m_{kk}\left(\Delta x_k\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(t+1) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j \\
&(t) + \sum_{i=1}^{n} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right) + m_{kk}\left(\Delta x_k\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta C &= C(t+1) - C(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right) + m_{kk}\left(\Delta x_k\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}x_i(t)x_j(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Delta C = \sum_{j=1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right) + m_{kk}\left(\Delta x_k\right)^2
$$

No se exige que $m_{kk} = 0$; basta con que $m_{kk} \geq 0$, $1 \leq k \leq n$.

Entonces

$$
\Delta C \geq \sum_{j=1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} m_{ik}x_i(t)\left(\Delta x_k\right)
$$

Y por simetría de M, se tiene que $m_{kj} = m_{jk}$; y con ello

$$
\Delta C \geq \sum_{j=1}^{n} m_{kj}\left(\Delta x_k\right)x_j(t) + \sum_{i=1}^{n} m_{ki}\left(\Delta x_k\right)x_i(t) = 2\Delta x_k \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t)
$$

$$
\Delta C \geq 2\Delta x_k \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t)
$$

Caso 1: $x_k(t+1) = x_k(t)$, entonces $\Delta x_k = 0$ y claramente $\Delta C \geq 0$.

Caso 2: $x_k(t+1) < x_k(t)$, entonces $x_k(t) = +1$ y $x_k(t+1) = -1$. De acuerdo con la expresión A.5 se tiene que $\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) < 0$; por otro lado, $\Delta x_k = x_k(t+1) - x_k(t) = -1 - 1 = -2$ y esto significa que $\Delta C \geq 2\Delta x_k \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) = 2(-2)\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) > 0$.

Caso 3: $x_k(t+1) > x_k(t)$, entonces $x_k(t) = -1$ y $x_k(t+1) = +1$. De acuerdo con la expresión A.5 se tiene que $\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) > 0$. Por otro lado, $\Delta x_k = x_k(t+1) - x_k(t) = 1 - (-1) = +2$ y esto significa que $\Delta C \geq 2\Delta x_k \sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) = 2(2)\sum_{j=1}^{n} m_{kj}x_j(t) > 0$.

■

A.3. Consideraciones finales del apéndice.

En este apéndice hemos presentado los desarrollos de dos demostraciones para la convergencia de la Memoria Hopfield, que es uno de los trabajos clásicos en memorias asociativas. Su autor, el físico norteamericano John Hopfield es responsable, según voces autorizadas, de haber revivido el interés, a principios de los ochenta del siglo XX, en las redes neuronales y en particular en las memorias asociativas, después de un período de estancamiento de más de una década.

Uno de los desarrollos parte de la sugerencia del propio Hopfield, y el otro, de un importante artículo: (McEliece, Posner, Rodemich, & Venkatesh, 1987).

Bibliografía

[1] Abu-Mostafa, Y. & St. Jacques. J. (1985). Information capacity of the Hopfield model, *IEEE Transactions on Information Theory, IT-31, 4*, 461-464.

[2] Adeodato P. J. L. & Taylor J. G. (1996). Autoassociative memory with high storage capacity, In C. von der Malsburg, W. von Seelen, J. C Vorbrueggen & B. Sendhoff (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science, 1112*, (pp. 29-34),. Bochum, Germany: ICANN'96.

[3] Aleksander, I. & Morton, H. B. (1997). Weightless and other memory-based networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation,* (pp. C1.5:1-C1.5:15). New York: Oxford.

[4] Amari. S. (1972). Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements, *IEEE Transactions on Computers, C-21, 11*, 1197-1206.

[5] Amari, S. (1977). Neural theory of association and concept-formation, *Biological Cybernetics. 26*, 175-185.

[6] Anderson. J. A. (1972). A simple neural network generating an interactive memory, *Mathematical Biosciences, 14*. 197-220.

[7] Anderson, J. A. & Rosenfeld, E. (Eds.) (1990). *Neurocomputing: Fundations of Research*. Cambridge: MIT Press.

[8] Anderson, J. A., Silverstein, J., Ritz, S. & Jones, R. (1977). Distinctive features. categorical perception. and probability learning: some applications of a neural model, *Psichological Review. 84*, 413-451.

[9] Anderson. J. R. & Bower, G. (1977). *Memoria Asociativa*, México: Limusa.

[10] Austin, J. (1987). ADAM: A Distributed Associative Memory for Scene Analysis. In *Proceedings of First International Conference on Neural Networks.* (pp. 285-295). San Diego: Ed. M Caudhill and C Butler.

[11] Austin. J., Buckle. S., Kennedy. J., Moulds, A., Pack, R. & Turner, A. (1997). The cellular neural network associative processor, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.). *Associative Processing and Processors*, (pp. 284-306). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

[12] Bandyopadhyay. S. & Datta, A. K. (1996). A novel neural hetero-associative memory model for pattern recognition. *Pattern Recognition. 29, 5*, 789-795.

[13] Bosch, H. & Kurfess, F. J. (1998). Information storage capacity of incompletely connected associative memories. *Neural Networks (11). 5*, 869-876.

[14] Browne. C. & Aleksander, I. (1996).Learned Probabilistic Prediction in a Weightless Neural Network. London Imperial College Technical Report NSE96_03.

[15] Buhmann. J. (1995). Oscillatory associative memories, In M. Arbib (Ed.), *Handbook of Brain Theory & Neural Networks*,.(pp. 691-694). Cambridge: MIT Press.

[16] Chen. C. & Honavar. V. (1995). A neural architecture for content as well as address-based storage and recall: theory and applications. Iowa State University Technical Report TR95-03.

[17] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (1999). Cálculo de momentos morfológicos basado en transformada de distancia, En *Selected Works 1997-1998* (pp. 111-117). ISBN 970-18-3427-5, CIC-IPN. México.

18] Díaz de León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (1999). *Generalización del concepto de imagen.* IT-20, Serie Azul, ISBN 970-18-2675-2, CIC-IPN. México.

19] Díaz de León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (1999). *Estructuras discretas bajo el concepto generalizado de imagen.* IT-21. Serie Azul, ISBN 970-18-2676-0. CIC-IPN, México.

[20] Díaz-de-León, J. L. & Yáñez, C. (1999). Memorias Asociativas con Respuesta Perfecta y Capacidad Infinita, *Memoria del TAINA '99. México, D.F.*, 23-38.

[21] Díaz-de-León Santiago, J.L. Yáñez Márquez, C. & Mosso, J.L. (2000). Telemedicina, *Revista Academia. No.26*, Secretaría Académica del Instituto Politécnico Nacional, México.

[22] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez-Márquez, C. (2001). *Correlograph de Willshaw, Buneman & Longuet-Higgins*, IT-49, Serie Verde, ISBN 970-18-6689-4. CIC-IPN, México.

[23] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez-Márquez, C. (2001). *Algunas Aportaciones de S. Amari en Memorias Asociativas*, IT-51, Serie Verde ISBN 970-18-6691-6, CIC-IPN, México.

[24] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez-Márquez, C. (2001). *Pruebas de Convergencia de la Memoria Hopfield*, IT-53, Serie Verde, ISBN 970-18-6693-2, CIC-IPN, México.

[25] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez-Márquez, C. (2001). *Model BAM*, IT-55, Serie Verde, ISBN 970-18-6695-9, CIC-IPN, México.

[26] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez-Márquez, C. (2001). *Memorias Morfológicas Heteroasociativas*, IT-57, Serie Verde, ISBN 970-18-6697 5, CIC-IPN, México.

[27] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (Eds.) (2002 *Reconocimiento de Patrones. Avances y Perspectivas*. Colección RESEARCH ON COMPUTING SCIENCE, Vol. 1, ISBN 970189476-6, CIC-IPN, México.

[28] Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (Obra a publicarse en 2003). *Introducción a la morfología matemática de conjuntos*, Colección de Ciencia de la Computación, CIC-IPN-UNAM-FCE, México.

[29] Flynn, M., Kanerva, P. & Bhadkamkar, N. (1989). Sparse distributed memory: principles and operation, Stanford University Technical Report CSL-TR-89-400.

[30] Gori, M., Lastrucci, L. & Soda, G. (1996). Autoassociator-based models for speaker verification, *Pattern Recognition Letters, 17, 3*, 241-250.

[31] Graham, B. & Willshaw, D. (1995). Improving recall from an associative memory. *Biological Cybernetics, 72*, 337-346.

[32] Haralick, R. M., Sternberg, S. R. & Zhuang, X. (1987). Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-9, 4*, 532-550.

[33] Hassoun, M. H. (Ed.) (1993). *Associative Neural Memories*, New York: Oxford University Press.

[34] Hassoun, M. H. (1995). *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. Cambridge: MIT Press.

[35] Hassoun, M. H. & Watta, P. B. (1997). Associative memory networks, In Emile Fiesler (Ed.), *Handbook of Neural Computation*, (pp. C1.3:1-C1.3:14). New York: Oxford.

[36] Hattori, M. & Hagiwara, M. (2000). Associative memory for intelligent control, *Mathematics and Computers in Simulation, 51*, 349-374.

[37] Hely, T. A., Willshaw, D. J. & Hayes, G. M. (1997). A new approach to Kanerva's sparse distributed memory, *IEEE Transactions on Neural Networks, 8, 3*, 791-794.

[38] Herrmann, F. P. & Sodini, C. G. (1992). A dynamic associative processor for machine vision applications, *IEEE Micro, 12, 3*, 31-41.

[39] Hopfield, J.J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 79*, 2554-2558.

[40] Hopfield, J.J. (1984). Neurons with graded respose have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proceedings of the National Academy of Sciences, 81*, 3088-3092.

[41] Imada, A. & Araki K. (1995). Genetic algorithm enlarges the capacity of associative memory. In L.J.Eshelman(Ed.), *Proceedings of 6th International Conference on Genetic Algorithms*, (pp 413-420). San Francisco: Morgan Kaufmann.

42] Jagota, A., Narasimhan, G. & Regan, K. W. (1998). Information Capacity of Binary Weights Associative Memories, *Neurocomputing, 19(1-3)*, 35-38.

[43] Jorgensen, T. M. (1997). Classification of handwritten digits using a RAM neural net architecture, *International Journal of Neural Systems, 8, 1,* 17-26.

[44] Kanerva, P. (1988). *Sparse Distributed Memory*, Cambridge: MIT Press.

[45] Kennedy, J. V., Austin, J. & Cass, B. (1995). A hardware implementation of a binary neural image processor, *Proceedings of the IEE Conference on Image Processing and its Applications*, Edinburgh, UK.

[46] Kinser, J. M. (1995). Fast analog associative memory. *Poceedings of the SPIE, 2568*, 290-293.

[47] Kohonen, T. (1972). Correlation matrix memories, *IEEE Transactions on Computers, C-21, 4*, 353-359.

[48] Kohonen, T. (1974). An adaptive associative memory principle, *IEEE Transactions on Computers, C-24, 4*, 444-445.

[49] Kohonen, T. (1987). *Content-Addressable Memories*, Berlin: Springer-Verlag.

[50] Kohonen, T. (1989). *Self-Organization and Associative Memory*. Berlin: Springer-Verlag.

[51] Kohonen, T. (1997). *Self-Organizing Maps*, Berlin: Springer.

[52] Kohonen, T. & Ruohonen, M. (1973). Representation of associated data by matrix operators, *IEEE Transactions on Computers, C-22*, 701-702.

[53] Kolen, J. F., & Pollack, J. B. (1991). Multiassociative memory. *The Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 785-789.

[54] Kosko, B. (1988). Bidirectional associative memories, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 18, 1*, 49-60.

[55] Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.

[56] Krikelis, A. & Weems, C. C. (1997). Associative Processing and Processors, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 2-9). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

[57] Little, W. & Shaw, G. (1975). A statistical theory of short and long term memory, *Behavioral Biology, 14*, 115-133.

[58] Ludermir, T. B., Carvalho, A., Braga, A. & Souto, M. C. P. (1999). Weightless neural models: a review of current and past works, *Neural Computing Surveys, 2*, 41-61.

[59] McCulloch, W. & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics, 5*, 115-133.

[60] McEliece, R., Posner, E., Rodemich, E. & Venkatesh, S. (1987). The capacity of the Hopfield associative memory, *IEEE Transactions on Information Theory, IT-33, 4*, 461-482.

[61] Minsky, M. & Papert, S. (1988). *Perceptrons*. Cambridge: MIT Press.

[62] Moore, J. (1968). *Elements of linear algebra and matrix theory*. New York: McGraw-Hill.

[63] Nakano, K. (1972). Associatron-A model of associative memory, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-2, 3*, 380-388.

[64] Palm, G., Schwenker, F., Sommer F. T. & Strey, A. (1997). Neural associative memories, In A. Krikelis & C. C. Weems (Eds.), *Associative Processing and Processors*, (pp. 307-326). Los Alamitos: IEEE Computer Society.

[65] Ritter, G. X., Sussner, P. & Diaz-de-Leon, J. L. (1998). Morphological associative memories, *IEEE Transactions on Neural Networks, 9*, 281-293.

[66] Ritter, G. X., Diaz-de-Leon, J. L. & Sussner, P. (1999). Morphological bidirectional associative memories, *Neural Networks, 12*, 851-867.

[67] Rosen, K. H. (1995) *Discrete Mathematics and its Applications*. New York: McGraw-Hill.

[68] Sánchez Garfias, F.A., Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (2002). Lernmatrix de Steinbuch: condiciones necesarias y suficientes para recuperación perfecta de patrones, En Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (Eds.) *Reconocimiento de Patrones. Avances y Perspectivas* (pp. 437-448). Colección RESEARCH ON COMPUTING SCIENCE, Vol. 1. ISBN 970189476-6, CIC-IPN, México.

Santiago Montero, R., Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (2002). Clasificador híbrido de patrones basado en la Lernmatrix de Steinbuch y el Linear Associator de Anderson-Kohonen, En Díaz-de-León Santiago, J.L. & Yáñez Márquez, C. (Eds.) *Reconocimiento de Patrones. Avances y Perspectivas* (pp. 449-460). Colección RESEARCH ON COMPUTING SCIENCE, Vol. 1, ISBN 970189476-6, CIC-IPN, México.

Schwenk, H. & Milgram, M. (1995). Transformation invariant autoassociation with application to handwitten character recognition, In D. S. Touretzky, G. S. Tesauro & T. K. Leen (Eds.). *Neural Information Processing Systems*, (pp. 991-998). Cambridge: MIT Press.

Serra, J. (1992). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*, London: Academic Press.

Silver, S., Glover, R. & Stonham, T. (1996). Associative memory neural networks for time series prediction, *Proceedings of the Third IEEE ICECS*, 651-654.

Simpson, P. K. (1990). *Artificial Neural Systems*, New York: Pergamon Press.

4] Sommer, F. T. & Palm, G. (1998). Bidirectional retrieval from associative memory, In M. I. Jordan, M. J. Kearns, & S. A. Solla (Eds.), *Advances in Neural Information Processing Systems 10*, (pp. 675-681). Cambridge: MIT Press.

5] Sossa-Azuela, J.H., Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León S., J.L. (1999). *Geometric moments computation based on morphological operations*, IT-23, Serie Azul, ISBN 970-18-2616-6, CIC-IPN, México.

[76] Sossa-Azuela, J.H., C. & Díaz-de-León S., J.L. (2000). Mathematical Morphology based on Linear Combined Metric Spaces on $\mathbb{Z}^2$ (Part I): Fast Distance Transforms. *Journal of Mathematical Imaging and Vision, 12*, 137-154.

77] Sossa-Azuela, J.H., C. & Díaz-de-León S., J.L. (2000). Mathematical Morphology based on Linear Combined Metric Spaces on $\mathbb{Z}^2$ (Part I): Constant Time Morphological Operations, *Journal of Mathematical Imaging and Vision, 12*, 155-168.

[78] Sossa-Azuela, J.H., Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León S., J.L. (2001). Computing geometric moments using morphological erosions. *Pattern Recognition, 34, 2.* 271-276.

[79] Steinbuch, K. (1961). Die Lernmatrix, *Kybernetik, 1, 1,* 36-45.

[80] Steinbuch, K. & Frank, H. (1961). Nichtdigitale Lernmatrizen als Perzeptoren, *Kybernetik, 1, 3,* 117-124.

[81] Storkey, A. J. (1997). Increasing the capacity of a Hopfield network without sacrificing functionality, *International Conference on Artificial Neural Networks,* 451-456.

[82] Stright, J. R., Coffield, P. C. & Brooks, G. W. (1998). Analog VLSI implementation of a morphological associative memory, *Poceedings of the SPIE, 3452-03,* 14-22.

[83] Turner, M. & Austin, J. (1997). Matching performance of binary correlation matrix memories, *Neural Networks.10, 9,* 1637-1648.

[84] Villanueva, N. & Figueroa, J. (1998). Superposición de información en memorias aleatorias: análisis cualitativo, *Memorias del Simposium Internacional de Computación CIC'98,* 559-564.

[85] Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. (1969). Non-holographic associative memory, *Nature, 222,* 960-962.

[86] Yáñez, C. & Díaz-de-León, J. L. (1999). Nuevas Memorias Asociativas Basadas en Operadores Binarios, *Memoria del TAINA '99, México, D.F.,* 245-257.

[87] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Lernmatrix de Steinbuch,* IT-48, Serie Verde, ISBN 970-18-6688-6, CIC-IPN, México.

[88] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Linear Associator de Anderson-Kohonen,* IT-50, Serie Verde, ISBN 970-18-6690-8, CIC-IPN, México.

[89] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Memoria Asociativa Hopfield,* IT-52, Serie Verde, ISBN 970-18-6692-4, CIC-IPN, México.

[90] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Modelo ADAM,* IT-54, Serie Verde, ISBN 970-18-6694-0, CIC-IPN, México.

[91] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Modelo SDM*, IT-56, Serie Verde, ISBN 970-18-6696-7, CIC-IPN, México.

[92] Yáñez-Márquez, C. & Díaz-de-León Santiago, J.L. (2001). *Memorias Morfológicas Autoasociativas*, IT-58, Serie Verde, ISBN 970-18-6698-3, CIC-IPN, México.

[93] Yáñez-Márquez, C. (2002). *Memorias Asociativas basadas en Relaciones de Orden y Operadores Binarios*. Tesis doctoral. CIC-IPN, México.

[94] Zboril, F. (1997). An application of the sparse distributed memory, *Proceedings of the ASIS 97*, 127-132.